SUMA 2019

Reunión Anual de la UMA junto a la SOMACHI

NOTAS DE CLASES DEL CURSO:

Control Óptimo de Ecuaciones en Derivadas Parciales: Teoría y Aplicaciones

Claudia M. Gariboldi

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO

24 - 27 de Septiembre de 2019

Mendoza. Argentina

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Qué es un problema de control óptimo?

Los problemas de control pueden analizarse por medio de un modelo matemático que describe un sistema físico a través de una ecuación de estado

$$A(y) = f(u) \tag{1.1}$$

donde y es la solución, la variable que proporciona información sobre el estado del sistema y u es el control, la variable que podemos elegir con libertad en un conjunto de controles admisibles, U_{ad}, para actuar sobre el mismo. En la práctica (1.1) es una ecuación o sistema algebraico o funcional (integral, diferencial ordinario, en derivadas parciales, etc.) eventualmente completado con condiciones iniciales, de contorno u otras.

Controlar el sistema es hallar u en U_{ad} tal que la solución de éste verifique un objetivo prefijado. Si se cumple, el sistema es controlable, y cuando existe más de un control, se toma el de tamaño mínimo en un determinado aspecto: un *control óptimo*. En la práctica, un problema tipo de optimización es aquel en el que se desea conducir la solución a un estado objetivo y_d y para ello se minimiza la distancia entre y e y_d. Con este planteamiento, un problema de control se reduce al cálculo de puntos extremales con restricciones.

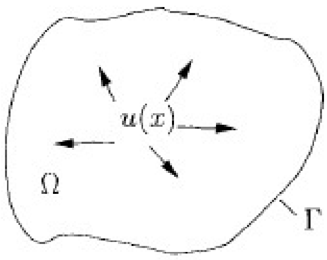
Es nuestro interés estudiar problemas de control óptimo relacionados con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en particular problemas elípticos. En este sentido, centraremos nuestra atención en el estudio de la existencia y unicidad de los controles óptimos y en deducir las correspondientes condiciones de optimalidad.

1.2. Ejemplos de problemas convexos

Presentamos algunos ejemplos de problemas de control óptimo convexos, los cuales están vinculados a ecuaciones en derivadas parciales *lineales*.

Ejemplo 1.2.1. Control distribuido. Problema estacionario.

Consideremos un cuerpo que es calentado o enfriado y ocupa un dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (como se muestra en la siguiente figura). Sea u la fuente de calor (*el control*), la cual es constante en tiempo pero depende de la variable espacial, esto es, $u = u(x)$. Nuestro objetivo es elegir el control en tal sentido que la correspondiente distribución de temperatura $y = y(x)$ en Ω (*el estado*) esté lo más próximo posible a una distribución de temperatura estacionaria deseada $y_\Omega = y_\Omega(x)$ en Ω.



Esto puede ser modelado de la siguiente manera:

$$\text{mín } J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y(x) - y_\Omega(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 dx \tag{1.2}$$

sujeto a la ecuación de estado

$$\boxed{-\Delta y = \beta u \quad \text{en} \quad \Omega, \quad y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma} \tag{1.3}$$

donde $\beta = \beta(x)$, $\lambda = cte. \geq 0$ y tal que $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$ en Ω, con u_a y u_b restricciones sobre el control u.

Este es un problema **elíptico lineal-cuadrático** con control **distribuido**.

Ejemplo 1.2.2. Control frontera. Problema no estacionario.

Consideremos un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que es calentado para algún periodo de tiempo $T > 0$. Denotemos su temperatura por $y = y(x,t)$, con $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$. Supongamos que la temperatura inicial del cuerpo es $y_0 = y_0(x)$ y que queremos llegar a una temperatura y_Ω en el tiempo final T. Si escribimos $Q = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, el problema puede ser modelado como

$$\text{mín } J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y(x,T) - y_\Omega(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^T \int_\Gamma |u(x,t)|^2 d\gamma dt \tag{1.4}$$

sujeto a

$$\boxed{y_t - \Delta y = 0 \text{ en } Q, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \alpha(u - y) \text{ sobre } \Sigma, \quad y(x,0) = y_0(x) \text{ en } \Omega} \tag{1.5}$$

y tal que $u_a(x,t) \leq u(x,t) \leq u_b(x,t)$ en Σ.

Este es un problema **parabólico lineal-cuadrático** con control **frontera**.

1.3. Ejemplos de problemas no convexos

Damos ahora algunos ejemplos de problemas no convexos, los cuales están vinculados a ecuaciones en derivadas parciales *semilineales*.

Ejemplo 1.3.1. Control frontera. Problema estacionario.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio acotado y Γ su frontera. Se formula un problema de control óptimo vinculado a un modelo de calentamiento con condición de radiación en la frontera, de la siguiente manera

$$\text{mín } J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y(x) - y_\Omega(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Gamma |u(x)|^2 d\gamma \tag{1.6}$$

sujeto a la ecuación de estado

$$\boxed{-\Delta y = 0 \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \alpha(u^4 - y^4) \text{ sobre } \Gamma} \tag{1.7}$$

y tal que $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$ en Γ.

Ejemplo 1.3.2. Control distribuido. Problema no estacionario.

Se puede formular un problema de control óptimo vinculado a un modelo simplificado no estacionario de superconductividad, de la siguiente manera

$$\text{mín } J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y(x,T) - y_\Omega(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2 dxdt \tag{1.8}$$

sujeto a

$$\boxed{y_t - \Delta y - y + y^3 = u \text{ en } Q, \quad y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \quad y(\cdot, 0) = 0 \text{ en } \Omega} \tag{1.9}$$

y tal que $u_a(x,t) \leq u(x,t) \leq u_b(x,t)$ en Q.

CAPÍTULO 2

Caso Finito-dimensional

2.1. Problema de control óptimo en dimensión finita

Supongamos que $J = J(y, u)$, $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ denota un funcional costo a ser minimizado, A es una matriz $n \times n$, B una matriz $n \times m$ y $U_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ no vacío, el conjunto de controles admisibles. Consideremos el problema de optimización

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{mín } \; J(y,u) \\ Ay = Bu, \qquad u \in U_{ad}. \end{array}} \tag{2.1}$$

En principio, (2.1) es un problema de optimización en el cual las incógnitas y y u juegan roles similares. Pero esta situación cambia, si suponemos adicionalmente que la matriz A tiene una inversa A^{-1}. Es decir, podemos resolver para y en (2.1), obteniendo

$$y = A^{-1}Bu,$$

por lo tanto, para cada $u \in \mathbb{R}^m$ hay una única solución $y \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos al vector u **el control** y al vector y **el estado**. Así, (2.1) será un problema de **control óptimo finito-dimensional**.

Sea $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $S = A^{-1}B$, la matriz solución de nuestro sistema de control. Entonces $y = Su$, con lo cual, J puede ser reducido al funcional costo f dado por

$$J(y, u) = J(Su, u) =: f(u)$$

y el problema de optimización se escribe como

$$\boxed{\text{mín } \; f(u), \qquad u \in U_{ad}.} \tag{2.2}$$

2.2. Existencia de controles óptimos

Definición 2.2.1. Un vector $\overline{u} \in U_{ad}$ es llamado un **control óptimo** para el problema (2.1), si $f(\overline{u}) \leq f(u)$ para todo $u \in U_{ad}$; entonces $\overline{y} := S\overline{u}$ es llamado el **estado óptimo** asociado con $\overline{u}$.

Teorema 2.2.2. Supongamos que J es continuo en $\mathbb{R}^n \times U_{ad}$ y que el conjunto U_{ad} es no vacío, cerrado y convexo. Si la matriz A es invertible, entonces (2.1) tiene al menos una solución.

Demostración. Como J es continuo, resulta que f es continua en U_{ad} y dado que éste es un conjunto cerrado y acotado finito-dimensional entonces U_{ad} es compacto. Así, por el teorema de Weierstrass, f tiene un mínimo en U_{ad}. Esto es, existe al menos un $\overline{u} \in U_{ad}$ tal que $f(\overline{u}) = \min\limits_{u \in U_{ad}} f(u)$. □

2.3. Condiciones necesarias de optimalidad de primer orden

Notación. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, denotaremos por

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{(derivadas parciales)}$$

$$f'(x) = (D_1 f(x), \ldots, D_m f(x)) \quad \text{(derivada)}$$

$$\nabla f(u) = f'(u)^T \quad \text{(gradiente)}$$

Para funciones $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotaremos por

$$D_x f \quad \text{(vector fila de derivadas parciales de } f \text{ con respecto a } x_1, \ldots, x_n\text{)}$$

$$\nabla_x f \quad \text{(correspondiente vector columna)}$$

La expresión

$$(u, v)_{\mathbb{R}^m} = u \cdot v = \sum_{i=1}^{m} u_i v_i$$

denota el producto escalar Euclídeo en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 2.3.1. Sea U_{ad} un convexo. Entonces cualquier control óptimo $\overline{u}$ para (2.1) satisface la inecuación variacional

$$f'(\overline{u})(u - \overline{u}) \geq 0, \qquad \forall u \in U_{ad} \tag{2.3}$$

Demostración. Sea $u \in U_{ad}$ y $t \in (0, 1]$, el elemento $tu + (1 - t)\overline{u} = \overline{u} + t(u - \overline{u}) \in U_{ad}$ y se satisface que

$$f(\overline{u} + t(u - \overline{u})) \geq f(\overline{u}), \quad \forall u \in U_{ad}$$

luego

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\overline{u} + t(u - \overline{u})) - f(\overline{u})}{t} \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}$$

esto es, $f'(\overline{u})(u - \overline{u}) \geq 0$, $\forall u \in U_{ad}$. □

Utilizando la regla de la cadena, tenemos que $f' = D_y JS + D_u J$. Luego,

$$\begin{aligned} f'(\overline{u})h &= D_y J(S\overline{u}, \overline{u})Sh + D_u J(S\overline{u}, \overline{u})h \\ &= (\nabla_y J(\overline{y}, \overline{u}), A^{-1}Bh)_{\mathbb{R}^n} + (\nabla_u J(\overline{y}, \overline{u}), h)_{\mathbb{R}^m} \\ &= (B^T(A^T)^{-1}\nabla_y J(\overline{y}, \overline{u}) + \nabla_u J(\overline{y}, \overline{u}), h)_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned}$$

Aquí, la inecuación variacional (2.3) toma la forma

$$(B^T(A^T)^{-1}\nabla_y J(\overline{y}, \overline{u}) + \nabla_u J(\overline{y}, \overline{u}), u - \overline{u})_{\mathbb{R}^m} \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{2.4}$$

2.4. Estado adjunto y gradiente reducido

A los efectos de simplificar la expresión (2.4) introduciremos la nueva variable

$$\overline{p} := (A^T)^{-1}\nabla_y J(\overline{y}, \overline{u}). \tag{2.5}$$

Esta cantidad, correspondiente al par $(\overline{y}, \overline{u})$ puede ser determinada resolviendo

$$A^T\overline{p} = \nabla_y J(\overline{y}, \overline{u}). \tag{2.6}$$

Definición 2.4.1. La ecuación (2.6) es llamada la **ecuación adjunta** y su solución $\overline{p}$ es llamada el **estado adjunto** asociado con $(\overline{y}, \overline{u})$.

Notar que la forma del gradiente de f se simplifica, esto es, de (2.4)

$$\nabla f(\overline{u}) = B^T\overline{p} + \nabla_u J(\overline{y}, \overline{u}).$$

El vector $\nabla f(\overline{u})$ es el **gradiente reducido**.

Teorema 2.4.2. Supongamos que la matriz A es invertible y sea $\overline{u}$ un control óptimo para (2.1) con estado asociado $\overline{y}$, entonces la ecuación adjunta (2.6) tiene única solución $\overline{p}$ tal que

$$(B^T\overline{p} + \nabla_u J(\overline{y}, \overline{u}), u - \overline{u})_{\mathbb{R}^m} \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{2.7}$$

Demostración. Resulta directamente de la inecuación variacional (2.4) y la definición de $\overline{p}$. $\square$

En resumen, hemos deducido el siguiente **sistema de optimalidad** para los vectores incógnitas $\overline{y}$, $\overline{u}$ y $\overline{p}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &Ay = Bu, \quad u \in U_{ad} \\ &A^T p = \nabla_y J(y, u) \\ &(B^T p + \nabla_u J(y, u), v - u)_{\mathbb{R}^m} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}. \end{aligned}} \tag{2.8}$$

Toda solución $(\overline{y}, \overline{u})$ al problema de control óptimo (2.1) debe, junto con $\overline{p}$ resolver este sistema.

Observación 2.4.3. Sin restricciones. En el caso que $U_{ad} = \mathbb{R}^m$, la inecuación variacional (2.7) se reduce a la ecuación

$$B^T\overline{p} + \nabla_u J(\overline{y}, \overline{u}) = 0.$$

Ejercicio 1. Dado el funcional $J(y,u) = \frac{1}{2}|Cy - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2$, donde C es una matriz $n \times n$, y_d está dado, $\lambda = cte. > 0$ y $|\cdot|$ representa la norma Euclídea:

a) Hallar el sistema de optimalidad para el problema (2.1).

b) Para el caso $U_{ad} = \mathbb{R}^m$, obtener $\overline{u}$ en términos de $\overline{p}$.

CAPÍTULO 3

Problemas de Control Óptimo Elípticos

3.1. Conceptos básicos

Daremos algunos conceptos necesarios para estudiar problemas de control óptimo vinculados a ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

3.1.1. Derivadas débiles y espacios de Sobolev

En lo que sigue, llamaremos un **dominio** a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si es un conjunto abierto y conexo. Dado que la teoría de ecuaciones diferenciales parciales requiere de dominios Ω con frontera suficientemente suave, trabajaremos aquí con dominios regulares.

Definición 3.1.1. Denotamos por

a) $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, el conjunto de todas las funciones k-veces continuamente diferenciables con soporte compacto en Ω. El conjunto C_0^∞ es llamado **conjunto de funciones test**.

b) $L^1_{Loc}(\Omega)$, el conjunto de todas las funciones localmente integrables en Ω, esto es, el conjunto de todas las funciones que son integrable Lebesgue sobre todo subconjunto compacto de Ω.

A los efectos de dar la definición de derivada débil, introducimos la notación de multi-índice, esto es, vectores $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ cuyas componentes son enteros no negativos y el número $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ será la *longitud* del multi-índice.

Definición 3.1.2. Sea $y \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Si una función $w \in L^1_{Loc}(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega y(x) D^\alpha v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w(x) v(x) dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.1}$$

entonces w es llamada la **derivada débil** de y (asociada con α).

Definición 3.1.3. (Espacios de Sobolev) Sea $1 \leq p < \infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Denotamos por $W^{k,p}(\Omega)$ el espacio lineal de todas las funciones $y \in L^p(\Omega)$ teniendo derivadas débiles $D^\alpha y$ en $L^p(\Omega)$ para todos los multi-índices α de longitud $|\alpha| \leq k$, provisto con la norma

$$\|y\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\Sigma_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha y(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Para el caso $p = 2$, escribimos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

Para nuestros propósitos es de especial importancia el espacio $H^1(\Omega)$, el cual es provisto de la norma

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (y^2 + |\nabla y|^2) dx \right)^{1/2}.$$

Con el producto escalar

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

$H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición 3.1.4. La clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$ es denotado por $W_0^{k,p}(\Omega)$. Más aún, ponemos $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Los elementos de $W_0^{k,2}(\Omega)$ pueden ser vistos como funciones para las cuales todas las derivadas hasta el orden $k-1$ se anulan en la frontera. Por esto, para dominios Ω con frontera regular Γ, se sigue que

$$H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) : y|_\Gamma = 0\}.$$

Notar que en $H_0^1(\Omega)$ una norma puede ser definida por

$$\|y\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla y|^2 dx,$$

la cual resulta equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$.

3.1.2. Soluciones débiles de ecuaciones elípticas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un dominio acotado con frontera regular Γ. Consideremos el siguiente problema elíptico de valores en la frontera

$$\boxed{-\Delta y = u \quad \text{en} \quad \Omega, \quad y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma} \tag{3.2}$$

con $u \in L^2(\Omega)$ dado.

Como u puede ser muy irregular, la ecuación de Poisson puede no tener una solución clásica $y \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para tal u. En su lugar, buscaremos una solución débil en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

Definición 3.1.5. Llamamos $y \in H_0^1(\Omega)$ una **solución débil** al problema de valores en la frontera (3.2) si satisface la formulación débil o formulación variacional

$$\int_\Omega \nabla y \nabla v dx = \int_\Omega uv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Si llamamos $V = H_0^1(\Omega)$ y definimos $a : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$a(y, v) = \int_\Omega \nabla y \nabla v dx,$$

entonces la formulación débil puede ser escrita como

$$a(y, v) = (u, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V.$$

Luego, definimos el funcional lineal y continuo $F : V \to \mathbb{R}$ por $F(v) = (u, v)_{L^2(\Omega)}$. Así, (3.3) toma la forma general

$$a(y, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \tag{3.4}$$

y si denotamos por V^* el espacio dual de V, tenemos que $F \in V^*$.

El siguiente resultado es de fundamental importancia en la teoría para ecuaciones lineales elípticas.

Lema 3.1.6. (Lax-Milgram). Sea V un espacio de Hilbert real, y sea $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Mas aún, supongamos que existen constantes positivas α_0 y β_0 tales que, $\forall v, y \in V$:

$$|a(y, v)| \leq \alpha_0 \|y\|_V \|v\|_V \quad \text{(Acotación)} \tag{3.5}$$

$$|a(y, y)| \geq \beta_0 \|y\|_V^2 \quad \text{(V-elipticidad)} \tag{3.6}$$

entonces, para todo $F \in V^*$ la ecuación variacional (3.4) admite una única solución $y \in V$. Más aún, existe una constante $c_a > 0$, la cual no depende de F, tal que

$$\|y\|_V \leq c_a \|F\|_{V^*}. \tag{3.7}$$

La aplicación del lema de Lax-Milgram al caso de condición de frontera Dirichlet homogénea, requiere de la siguiente estimación.

Lema 3.1.7. (Desigualdad de Friedrichs). Para cualquier dominio acotado Ω con frontera regular, existe una constante $c(\Omega) > 0$, tal que

$$\int_\Omega |y|^2 dx \leq c(\Omega) \int_\Omega |\nabla y|^2 dx, \quad \forall y \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 3.1.8. Si Ω es un dominio acotado con frontera regular, entonces para todo $u \in L^2(\Omega)$ el problema (3.2) tiene una única solución débil $y \in H_0^1(\Omega)$. Más aún, existe una constante c, la cual no depende de u, tal que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Demostración. Aplicaremos el lema de Lax-Milgram en $V = H_0^1(\Omega)$. Para ello, puesto que $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio de $H^1(\Omega)$, usaremos la norma estándar de $H^1(\Omega)$. La condición (3.5) sucede, ya que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \nabla y \nabla v dx\right| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla y|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega (|y|^2 + |\nabla y|^2) dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega (|v|^2 + |\nabla v|^2) dx\right)^{1/2} \\
&\leq \|y\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para mostrar la V-elipticidad hacemos

$$\begin{aligned}
a(y,y) = \int_\Omega |\nabla y|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 dx + \frac{1}{2c(\Omega)}\int_\Omega |y|^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2} \min\{1, c(\Omega)^{-1}\} \|y\|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$|F(v)| = |(u,v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

obtenemos que $\|F\|_{V^*} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}$. Teniendo en cuenta la desigualdad (3.7), concluimos que

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_a \|F\|_{V^*} \leq c_a \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

lo cual prueba (3.8). □

3.1.3. Diferenciabilidad Gâteaux

Para la deducción de las condiciones necesarias de optimalidad, necesitaremos una generalización de la noción de derivada. Sean U y V espacios de Banach, W un subconjunto abierto y no vacío de U y sea $F : W \to V$.

Definición 3.1.9. Sea $u \in W$ y $h \in U$, si el límite

$$\delta F(u,h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} \tag{3.9}$$

existe en V, entonces es llamada la derivada direccional de F en u en la dirección de h. Si este límite existe para todo $h \in U$, entonces el mapeo $h \mapsto \delta F(u,h)$ es llamado la primera variación de F en u.

Definición 3.1.10. Supongamos que la primera variación $\delta F(u,h)$ en $u \in W$ existe y supongamos que existe un operador lineal y continuo $A : U \to V$ tal que

$$\delta F(u,h) = Ah$$

entonces F se dice diferenciable Gâteaux en u y A es la derivada Gâteaux de F en u. Escribimos $A = F'(u)$.

Notar que en el caso en que $V = \mathbb{R}$, si un funcional $f : W \to \mathbb{R}$ es diferenciable Gâteaux en un punto $u \in W$, entonces $f'(u)$ es un elemento del espacio dual U^*.

3.1.4. Operadores adjuntos

Si A es una matriz $m \times n$ entonces tenemos que $(Au, v)_{\mathbb{R}^m} = (u, A^T v)_{\mathbb{R}^n}$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^m$. De manera similar, para espacios de Hilbert damos la siguiente definición.

Definición 3.1.11. Sean los espacios de Hilbert reales $\{U, (\cdot,\cdot)_U\}$ y $\{V, (\cdot,\cdot)_V\}$ y el operador $A : U \to V$ lineal y continuo dado. Un operador A^* es llamado un **operador adjunto** de A si

$$(Au, v)_V = (u, A^* v)_U \quad \text{para todo} \quad u \in U \text{ y } v \in V.$$

3.2. Planteo del problema

Estamos ahora en condiciones de presentar un problema de control óptimo elíptico con el cual trabajaremos. Estudiaremos existencia y unicidad de solución y deduciremos las correspondientes condiciones de optimalidad de primer orden.

Consideremos el siguiente problema de control óptimo:

$$\min J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.10}$$

con y_d dado y $\lambda = cte. \geq 0$, sujeto a las restricciones

$$\boxed{-\Delta y = u \quad \text{en} \quad \Omega, \quad y = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma} \tag{3.11}$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{para c.t.p.} \quad x \in \Omega. \tag{3.12}$$

Definimos el conjunto de *controles admisibles* por

$$U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \ \text{ para c.t.p. } x \in \Omega\}.$$

el cual es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de $L^2(\Omega)$ (**ejercicio**).

Debido al Teorema 3.1.8, a cada $u \in U_{ad}$ le corresponde una única solución débil $y \in H_0^1(\Omega)$ al problema (3.11), el cual es el *estado asociado* con u.

Definición 3.2.1. Llamamos un control óptimo $\overline{u} \in U_{ad}$ y el estado óptimo $\overline{y} = y(\overline{u})$ asociado si

$$J(\overline{y}, \overline{u}) \leq J(y(u), u), \quad \forall u \in U_{ad}.$$

3.3. Existencia de controles óptimos

Para probar la existencia de un único control óptimo, daremos algunas definiciones y propiedades más generales.

Definición 3.3.1. Si M es un subconjunto de un espacio de Banach real U decimos que M es **débilmente secuencialmente cerrado**, si el límite de toda sucesión débilmente convergente $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ está en M. Decimos que M es **débilmente secuencialmente relativamente compacto** si toda sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ contiene una subsucesión que converge débilmente; si además, M es débilmente secuencialmente cerrado entonces es **débilmente secuencialmente compacto**.

A continuación damos un resultado, cuya demostración puede ser vista en [5, 9].

Teorema 3.3.2. Todo subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach es débilmente secuencialmente cerrado. Si el espacio es reflexivo y además el conjunto es acotado entonces es débilmente secuencialmente compacto.

Consideremos ahora el mapeo $G : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tal que $u \to y(u)$, el cual es llamado el operador control-a-estado.

Observación 3.3.3. Notar que, en virtud de (3.8), el mapeo G es lineal y continuo. Consideramos el operador $S = I \circ G$ donde $I : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ denota el operador inyección, el cual resulta un operador lineal y continuo. Así, el problema de control óptimo (3.10)-(3.12) se escribe como

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) = \frac{1}{2}\|Su - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.13}$$

Teorema 3.3.4. Sean $(U, \|.\|_U)$ y $(H, \|.\|_H)$ espacios de Hilbert real y sea $U_{ad} \subset U$ cerrado, convexo, acotado y no vacío, sea $y_d \in H$ y $\lambda \geq 0$ dados. Más aún, sea $S : U \to H$ un operador lineal y continuo. Entonces el problema de optimización

$$\min_{u \in U_{ad}} f(u) = \frac{1}{2}\|Su - y_d\|^2_H + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_U \tag{3.14}$$

admite una solución óptima $\overline{u}$. Si $\lambda > 0$ o S es inyectivo, entonces la solución está unívocamente determinada.

Demostración. Dado que $f(u) \geq 0$, existe

$$j = \inf_{u \in U_{ad}} f(u)$$

y existe una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset U_{ad}$ tal que $f(u_n) \to j$ cuando $n \to \infty$. El conjunto de los controles admisibles U_{ad} es cerrado y acotado (pero a diferencia del caso finito-dimensional) no necesariamente compacto. Como H es un espacio de Hilbert, entonces es reflexivo, por lo tanto en virtud del Teorema 3.3.2, el conjunto cerrado, acotado y convexo U_{ad} es débilmente secuencialmente compacto. Consecuentemente, alguna subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge débilmente a algún $\overline{u} \in U_{ad}$, esto es

$$u_{n_k} \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Como S es continuo, f resulta también continua y como es convexa, entonces es semicontinua inferiormente débil. Por lo tanto,

$$f(\overline{u}) \leq \liminf_{k \to \infty} f(u_{n_k}) = j$$

Aquí, como $\overline{u} \in U_{ad}$, tenemos que $f(\overline{u}) = j$, y entonces $\overline{u}$ es un control óptimo. La unicidad resulta de la estricta convexidad de f. Si $\lambda > 0$, esto resulta directamente del segundo sumando de f. En el caso $\lambda = 0$, la estricta convexidad es una consecuencia de la inyectividad de S (**ejercicio**). $\square$

Como una consecuencia del anterior teorema, obtenemos existencia y unicidad para el problema de control óptimo (3.10)-(3.12), lo cual queda plasmado en el siguiente resultado.

Teorema 3.3.5. Sea Ω un dominio acotado con frontera regular Γ, $\lambda \geq 0$, $y_d \in L^2(\Omega)$, $u_a, u_b \in L^2(\Omega)$ tales que $u_a(x) \leq u_b(x)$ para c.t.p. $x \in \Omega$, entonces el problema (3.10)-(3.12) tiene al menos una solución óptima $\overline{u}$. Si además, $\lambda > 0$ o S es inyectivo, la solución es única.

Demostración. Resulta de aplicar el teorema previo con $U = H = L^2(\Omega)$, $S = I \circ G$ y $U_{ad} = \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ para c.t.p. } x \in \Omega\}$. □

3.4. Sistema de optimalidad

A los efectos de obtener condiciones de optimalidad de primer orden para el problema (3.14), damos el siguiente resultado.

Lema 3.4.1. Sea C un subconjunto convexo y no vacío de un espacio de Banach real U, y sea f un mapeo a valores reales diferenciable Gâteaux en un subconjunto abierto de U conteniendo a C. Si $\overline{u} \in C$ es una solución al problema

$$\min_{u \in C} f(u) \tag{3.15}$$

entonces se satisface la inecuación variacional

$$f'(\overline{u})(u - \overline{u}) \geq 0, \quad \forall u \in C. \tag{3.16}$$

Inversamente, si $\overline{u} \in C$ resuelve esta inecuación variacional y f es convexa, entonces $\overline{u}$ es una solución al problema de mínimo (3.15).

Demostración. Para probar que si $\overline{u} \in C$ es solución del problema (3.15) entonces se verifica la inecuación variacional (3.16), se sigue como en el Teorema 2.3.1. Inversamente, si f es covexa, tenemos que

$$f(u) - f(\overline{u}) \geq f'(\overline{u})(u - \overline{u}), \quad \forall u \in C$$

y dado que (3.16) sucede, obtenemos que $\overline{u}$ es solución de (3.15). □

Estamos ahora en condiciones de aplicar el Lema 3.4.1 al problema de optimización cuadrático (3.14).

Teorema 3.4.2. Sean U y H espacios de Hilbert reales, $U_{ad} \subset U$ convexo y no vacío, $y_d \in H$ y $\lambda \geq 0$ una constante dada. Más aún, sea $S : U \to H$ un operador lineal y continuo. Entonces $\overline{u} \in U_{ad}$ es una solución al problema de minimización (3.14) si solo si $\overline{u}$ resuelve la inecuación variacional

$$(S^*(S\overline{u} - y_d) + \lambda\overline{u}, u - \overline{u})_U \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{3.17}$$

Demostración. En vista de las definiciones 3.1.9 y 3.1.11, el gradiente de f es de la forma

$$f'(\overline{u}) = S^*(S\overline{u} - y_d) + \lambda\overline{u}$$

y en virtud del Lema 3.4.1, se tiene la prueba. □

Observación 3.4.3. Notar que una forma equivalente de escribir la inecuación variacional (3.17) es

$$(S\overline{u} - y_d, Su - S\overline{u})_H + \lambda(\overline{u}, u - \overline{u})_U \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Retornando al problema de control óptimo (3.10)-(3.12), la condición del Teorema 3.4.2 está dada por

$$(S^*(S\overline{u} - y_d) + \lambda\overline{u}, u - \overline{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}, \tag{3.18}$$

donde el operador adjunto S^* debe ser determinado.

Lema 3.4.4. Para el problema de valores en la frontera (3.11), el operador adjunto $S^* : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ está dado por

$$S^*z = p$$

donde $p \in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil al problema de valor en la frontera

$$\boxed{-\Delta p = z \text{ en } \Omega, \qquad p = 0 \text{ sobre } \Gamma.} \tag{3.19}$$

Demostración. De la definición de operador adjunto S^*, tenemos que

$$(S^*z, u)_{L^2(\Omega)} = (z, Su)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z \in L^2(\Omega), \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Luego, si en la ecuación (3.11) multiplicamos por la función test $p \in H_0^1(\Omega)$ y en la ecuación (3.19) multiplicamos por la función $y \in H_0^1(\Omega)$, obtenemos

$$(z, y)_{L^2(\Omega)} = (p, u)_{L^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto,

$$(S^*z, u)_{L^2(\Omega)} = (z, Su)_{L^2(\Omega)} = (z, y)_{L^2(\Omega)} = (p, u)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z \in L^2(\Omega),\ \forall u \in L^2(\Omega).$$

Sabemos, del Teorema 3.1.8, que el mapeo $z \to p$ es lineal y continuo de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Puesto que z y u son arbitrarios y S^* está univocamente determinado, concluimos que $S^*z = p$. □

Definición 3.4.5. La solución débil $p \in H_0^1(\Omega)$ de la ecuación adjunta

$$\boxed{-\Delta p = \overline{y} - y_d \text{ en } \Omega, \qquad p = 0 \text{ sobre } \Gamma.} \tag{3.20}$$

es llamada el estado adjunto asociado con $\overline{y}$.

Notar que la ecuación (3.20) posee única solución $p \in H_0^1(\Omega)$. Poniendo $z = \overline{y} - y_d$, tenemos que

$$S^*(S\overline{u} - y_d) = S^*(\overline{y} - y_d) = p$$

y de (3.18) concluimos que

$$(p + \lambda\overline{u}, u - \overline{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Por lo tanto, hemos arribado al siguiente resultado.

Teorema 3.4.6. Supongamos que $\overline{u}$ es un control óptimo para el problema (3.10)-(3.12) y sea $\overline{y}$ el estado asociado. Entonces la ecuación adjunta (3.20) tiene una única solución débil p que satisface la inecuación variacional

$$(p + \lambda\overline{u}, u - \overline{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Inversamente, un control $\overline{u} \in U_{ad}$, el cual junto con su estado asociado $\overline{y} = y(\overline{u})$ y la solución p a (3.20) satisface la incecuación variacional anterior, es óptimo.

Aquí, un control u, junto con el estado óptimo y y el estado adjunto p, es óptimo para el problema (3.10)-(3.12) si y solo si (u, y, p) satisfacen el siguiente sistema de optimalidad

$$\boxed{\begin{array}{cc} -\triangle y = u & -\triangle p = y - y_d \\ y|_\Gamma = 0 & p|_\Gamma = 0 \\ \multicolumn{2}{c}{u \in U_{ad}} \\ \multicolumn{2}{c}{(p + \lambda\overline{u}, v - \overline{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}.} \end{array}} \tag{3.21}$$

Bibliografía

[1] Brezís, H., *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial (1983).

[2] Evans L. C., *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1998).

[3] Fernández Cara E. - Zuazua E., *Las mateáticas del control.* ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura. CLXXXIII 725, 383-393 (2007).

[4] Kinderlehrer D. - Stampacchia G. *An introduction to variational inequalities and their applications.* Academic Press, New York (1980)

[5] Kreyszig E. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley. New York (1978).

[6] Lions J. L. *Côntrole optimal des systemes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod-Gauthier Villars, Paris (1968).

[7] Tarzia D. A., *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre.* Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI-CONICET, Nro. 5, Buenos Aires (1981).

[8] Trölstzsch F., *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*, American Mathematical Society, Providence (2010).

[9] Yosida K. *Functional analysis.* Springer. New York. (1980).